Punti di Discontinuità

Determinare la natura dei punti di discontinuità delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2-4}$
2. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$
3. $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$

Esempio 1

Determiniamo il dominio della funzione data, poniamo:

$$x^2 - 4 \neq 0$$
$$x \neq \pm 2$$
$$D: (-\infty; -2) \cup (-2 + 2) \cup (+2; +\infty)$$

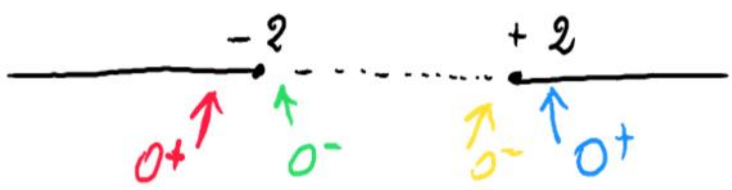
Andiamo a calcolare i limiti nei punti di discontinuità

$$\lim_{x \to -2^- \cdot} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 2} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

Nota. Per stabilire la natura dello 0 basterà porre

$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$x \leq -2;\ x \geq +2$$

Rappresentiamo e osserviamo che a sinistra di-2 la disequazione è positiva pertanto a sinistra di-2, il denominatore in-2 sarà uno zero positivo.



Il limite a destra di-2

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{11}{0^-} = -\infty.$$
$$\lim_{x \to +2} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +2^+} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

In x = -2 e sia il limite destro che sinistro sono ∞, il punto è di discontinuità di **II specie**; Analogamente x =2- e la retta x=-2(x =2) sono asintoti verticale.

Quindi quando un limite, dx o sx o entrambi, sono è pari a infinito il punto di discontinuità si dice di seconda specie e le rette, parallele all'asse delle y, per esso sono asintoti verticali.

Esempio 2

Determiniamo il dominio della funzione data:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$$
$$1 - x \neq 0; x \neq 1$$
$$\mathbb{D}: (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

$x = 1$è un punto di discontinuità per la funzione.

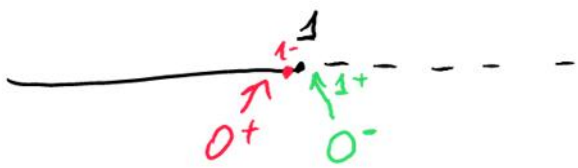
Calcoliamoci i limiti a destra e sinistra di 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{0}}}$$

Stabiliamo di che 0 si tratta

$1 - x > 0$
$x < 1$

rappresentiamo la disequazione



pertanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^{1/0^+}} = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Calcoliamo ci il limite destro:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{+1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{0^-}}} = = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Essendo limite destro diverso da limite sinistro ed entrambe finiti il punto di discontinuità si dirà di **I specie** e $|l_1 - l_2|$ si dirà salto della funzione; nel nostro caso il salto è 1.

Esempio 3

Determiniamo il dominio della funzione data:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$
$$x \neq 0$$
$$\mathbb{D}: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Quindi × = o è un sunto di discontinuità calcoliamoci i limiti in esso:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(limite notevole)

Il limite dx è uguale al sx, pertanto il punto x= o è un punto di discontinuità eliminabile o di **III specie.**